Lógica Quantitativa

APRESENTAÇÃO

A lógica quantitativa está presente na resolução de diversos problemas que envolvem a tradução de uma linguagem corrente para a simbólica.

Ela também é chamada de lógica dos predicados e constituiu um sistema lógico que facilita a integração suave de resultados categóricos e verofuncionais, facilitando a simbolização.

Nesta Unidade de Aprendizagem, vamos estudar os quantificadores existencial e universal e como se dá a quantificação, processo de transformar funções proposicionais em proposições. Além disso, vamos visualizar como a lógica dos quantificadores pode ser usada quando um termo predicado ocorre em uma proposição não singular.

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Demonstrar a notação para predicados e para sujeitos.
- Explicar o conceito de quantificador universal e existencial.
- Usar a lógica proposicional com os quantificadores.

INFOGRÁFICO

Ao se trabalhar com expressões envolvendo quantificadores, é muito importante compreender como se dá o processo de negação dessas expressões, ou seja, identificar quando estamos lidando com expressões contraditórias.

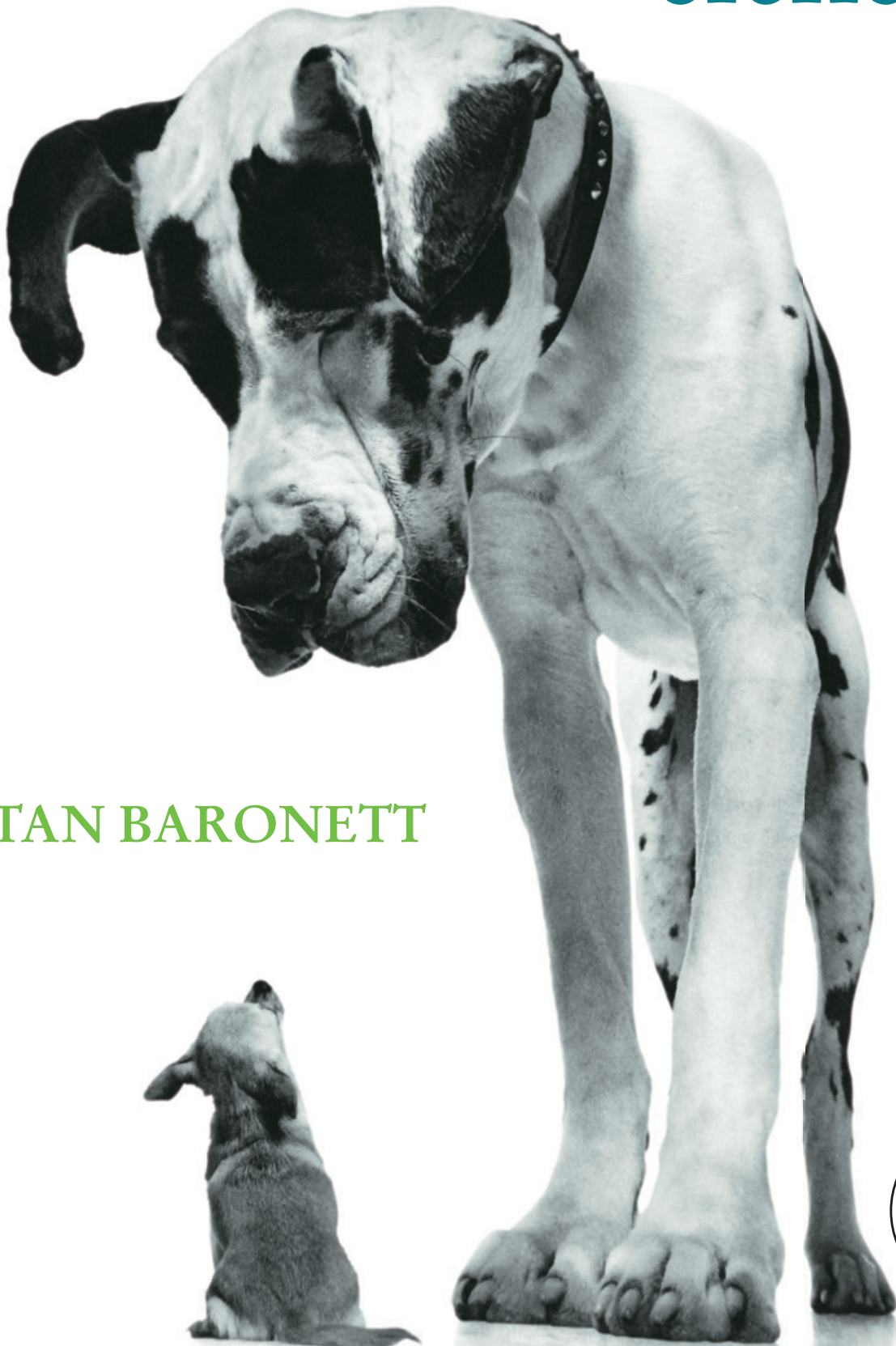
Você vai conferir no infográfico a seguir uma relação que evidencia expressões contrárias, mostrando como representar uma negação relacionada com quantificadores.

CONTEÚDO DO LIVRO

Você sabe o que é a lógica dos quantificadores? É o sistema lógico utilizado para analisar inferências complexas constituídas por preposições verofuncionais e categóricas. E quando uma proposição afirma que um indivíduo tem ou não uma característica especificada, de que conceito estamos falando?

Estas e outras perguntas estão respondidas e explicadas nos itens 7.2 e 7.3 do livro Lógica: uma introdução voltada para as ciências, utilizado como base teórica desta Unidade de Aprendizagem. Leia até a Tabela 7.1, na página 309.

Boa leitura!

LÓGICA

Uma introdução voltada para as ciências

STAN BARONETT

Como não há nenhuma linha em que ambas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, o método da tabela de verdade comprova que essa é uma inferência válida.

A seguir está uma demonstração da mesma inferência usando a dedução natural:

1. $M \supset P$
2. $\underline{S \supset M \qquad \therefore S \supset P}$
3. $S \supset P$ 1, 2, SH

2. Nenhum *M* é *P*
   Alguns *S* são *M*
   Alguns *S* não são *P*
3. Nenhum *P* é *M*
   Todos *S* são *M*
   Nenhum *S* é *P*
4. Alguns *M* são *P*
   Todos *M* são *S*
   Alguns *S* são *P*
5. Nenhum *P* é *M*
   Alguns *M* são *S*
   Alguns *S* não são *P*

7.2 INTEGRANDO PROPOSIÇÕES CATEGÓRICAS E VEROFUNCIONAIS

Considere a seguinte inferência, que contém um tipo de inferência diferente daqueles discutidos em capítulos anteriores:

> Todos os vice-presidentes dos Estados Unidos são presidentes do Senado.
>
> Dick Cheney é vice-presidente dos Estados Unidos.
>
> Dick Cheney é presidente do Senado.

A primeira premissa é uma proposição categórica que pode ser traduzida por "Todos *V* são *P*". A segunda premissa não é uma proposição categórica, de modo que temos uma inferência que não se encaixa diretamente em nossos procedimentos de demonstração anteriores. Embora a inferência seja perfeitamente válida, não temos nenhuma maneira de demonstrá-la. Na verdade, se usarmos as traduções que estão à nossa disposição, resultará que a inferência é inválida. Por exemplo, a interpretação booleana da primeira premissa permite-nos traduzi-la por "$V \supset P$". De acordo com essa interpretação, como *V* significa "vice-presidentes dos Estados Unidos" e *P* significa "presidentes do Senado", então o que poderemos fazer quando tratarmos da segunda premissa e da conclusão? Não podemos traduzir a segunda premissa, "Dick Che-

Lógica dos quantificadores: O sistema lógico de quantificação usado para analisar inferências complexas constituídas de proposições verofuncionais e categóricas.

Proposição singular: Uma proposição afirmando que um indivíduo em particular tem ou não uma característica especificada.

ney é vice-presidente dos Estados Unidos", por *V* porque *não* é a mesma proposição. A conclusão também não pode ser traduzida por *P*. Se traduzirmos a segunda premissa por *D* e a conclusão por *C*, obteremos a seguinte inferência inválida:

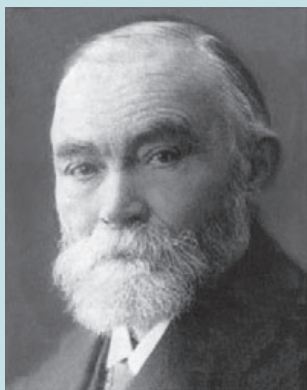
$$V \supset P$$
$$\underline{D \quad\quad}$$
$$C$$

A teoria moderna da lógica, que interpreta proposições como "Dick Cheney é vice-presidente dos Estados Unidos" permitindo-nos incorporá-las em um novo sistema de demonstração, é denominada **lógica dos quantificadores**, ou *lógica dos predicados*. Esse é o sistema lógico usado para analisar inferências complexas constituídas de proposições verofuncionais e categóricas. Esse sistema facilita a integração suave de resultados categóricos e verofuncionais, oferecendo um modo eficiente de transpor mais da linguagem natural e permitindo a análise precisa de proposições e inferências. Por exemplo, na lógica dos quantificadores, a proposição "Dick Cheney é vice-presidente dos Estados Unidos" é denominada **proposição singular** – afirmando que uma pessoa em particular tem uma característica específica. Nessa proposição, o termo sujeito "Dick Cheney" denota um determinado indivíduo. O termo predicado "vice-presidente dos Estados Unidos" designa uma característica específica. É possível que os mesmos termos sujeito e predicado ocorram em várias proposições singulares. Algumas dessas asserções serão verdadeiras e algumas serão falsas. Por exemplo, "Dick Cheney é um democrata" é uma proposição falsa. Essa proposição contém o mesmo termo sujeito que a proposição anterior (Dick Cheney), mas contém um termo predicado (democrata) diferente. A proposição "Tom Cruise é vice-presidente dos Estados Unidos" também é falsa. Essa proposição contém o mesmo termo predicado de antes (vice-presidente dos Estados Unidos), mas contém um termo sujeito (Tom Cruise) diferente. A proposição "Dick Cheney é um republicano" é verdadeira. Essa proposição contém o mesmo termo sujeito que a proposição anterior (Dick Cheney), mas contém um termo predicado (republicano) diferente.

Estratégia

Ao fazer a tradução para símbolos, assegure-se de que o termo predicado receba uma letra maiúscula (para facilitar, muitas vezes você pode usar a primeira letra do termo predicado). Para designar o indivíduo, sempre escolha uma letra minúscula, colocando-a após o termo predicado.

Precisamos de uma notação simbólica simples que nos capacite a fazer a distinção entre os indivíduos e as características que lhes atribuímos. Estipularemos que as letras minúsculas de *a* até *w* serão usadas como constantes para designar indivíduos (Dick Cheney, Tom Cruise, etc.). Por outro lado, as características tomadas como predicados dos indivíduos serão simbolizadas pelas letras maiúsculas *A*, *B*, *C*, etc. ("... é

BIOGRAFIA : GOTTLOB FREGE

Gottlob Frege (1848–1925) foi um dos mais originais e influentes pensadores modernos. Sua tentativa monumental de reduzir a matemática à lógica reuniu os dois campos para sempre, permitindo que Frege afirmasse que a partir de então "*todo matemático deve ser um filósofo e todo filósofo deve ser um matemático*". Uma das convicções fundamentais de Frege era a natureza *a priori* da matemática e da lógica, a partir da qual os fundamentos de ambos os campos podem ser desenvolvidos usando-se apenas a razão. É irônico que o trabalho de Frege resultou na descoberta de paradoxos lógicos e matemáticos associados a esse sistema – descobertas que, por sua vez, levaram a ideias revolucionárias sobre os fundamentos da matemática.

Aqui estão apenas alguns dos *insights* originais de Frege: o desenvolvimento da lógica dos quantificadores, a distinção entre constantes e variáveis, o uso correto de uma função lógica, e o primeiro esclarecimento de sentido e referência. O campo da lógica matemática pode ter suas origens remetidas ao trabalho pioneiro de Frege e, com isso, pode-se estabelecer uma conexão direta com o desenvolvimento das linguagens de computador.

um atleta", "... é solteiro", ".. é um congressista"). O sistema de símbolos usado nas proposições singulares coloca primeiro a letra maiúscula, o símbolo que designa a característica tomada como predicado, seguindo-se uma letra minúscula, o símbolo que denota o indivíduo. Por exemplo, se *d* representar "Dick Cheney" (o indivíduo) e *V* representar "vice-presidente dos Estados Unidos" (a característica tomada como predicado), então a proposição "Dick Cheney é vice-presidente dos Estados Unidos" poderá ser simbolizada por *Vd*. A proposição "Dick Cheney é republicano" pode ser representada por *Rd*.

Alguns exemplos de traduções básicas são os seguintes:

Proposições em português	Tradução simbólica
Arnold Schwarzenegger é um governador.	*Ga*
Arnold Schwarzenegger é um ator.	*Aa*
O Círculo Polar Ártico não é um local quente.	~ *Qa*
Nevada é um estado seco.	*Sn*
A pornografia é ilegal.	*Ip*

Proposições mais complexas podem ser traduzidas usando-se os conectivos verofuncionais. Por exemplo:

Proposições em português	Tradução simbólica
Carly é uma desenhista de moda ou uma dançarina.	$Mc \vee Dc$
Se Shane é um excelente estudante, então ele é brilhante.	$Es \supset Bs$
Se e apenas se Bill for honesto e leal, ele conseguirá o emprego.	$(Hb \cdot Lb) \equiv Eb$
John vencerá o concurso somente se ele não entrar em pânico.	$Cj \supset \sim Pj$

As proposições singulares usam os símbolos *a-w* e *A-Z*.

Referência Rápida 7.2 • Uso de símbolos em proposições singulares

1. *a-w* = constantes que designam indivíduos.
2. *A–Z* = características tomadas como predicados de indivíduos.
3. Em proposições singulares, escreve-se primeiro uma letra maiúscula, que designa uma característica, seguindo-se uma letra minúscula, que designa um indivíduo.

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 7.2

Traduza as seguintes proposições usando a notação simbólica aprendida nesta seção:

1. Repolho é um vegetal saudável.

Resposta: Sr

2. Repolho é um alimento que exala um forte aroma quando cozido.
3. Coelhos são animais sexualmente ativos.
4. Sir Lancelot foi um membro da Távola Redonda.
5. Steve McQueen não foi um ganhador de Oscar.

*6. Somente se Joe correr uma milha em menos de quatro minutos ele se qualificará para a competição.

7. Choverá hoje à noite somente se as nuvens continuarem a aumentar.
8. O Taj Mahal é uma das sete maravilhas do mundo moderno.
9. A torre Eiffel de Las Vegas tem um terço da altura da torre original em Paris.

10. Eu venderei meu carro se e somente se conseguir um bom preço por ele e puder encontrar algo melhor.
*11. O salmão tem um sabor agradável quando grelhado.
12. Os livros-textos são meus amigos.
13. Os telefones celulares não são produtos universalmente apreciados.
14. Ela passará no exame somente se estiver bem preparada.
15. Somente se estiver aqui às 20 horas ele será admitido.

7.3 QUANTIFICAÇÃO

Foi estipulado que as **constantes individuais**, que denotam indivíduos, são designadas por qualquer letra minúscula de *a* até *w*. As demais letras minúsculas, *x*, *y* e *z*, tem um uso diferente – são usadas para designar uma **variável individual**. Essa variável indica onde uma constante particular pode ser colocada, resultando numa proposição singular. Por exemplo, *Vx*, *My* e *Kz* usam variáveis individuais. Entretanto, não são exemplos de proposições, mas sim de **funções proposicionais**, as quais não são nem verdadeiras nem falsas, mas podem ter instâncias de substituição verdadeiras e falsas. Uma **instância de substituição** é quando uma função proposicional transforma-se em uma proposição, que é ou verdadeira ou falsa. Por exemplo, o predicado "tem mais de dois metros de altura" pode ser usado para criar a função proposicional *Ax*. A variável *x* pode ser substituída então por uma constante individual. Por exemplo, se *s* designar "Shaquille O'Neal"* e *d* designar "Dustin Huffman", então obteremos os seguintes resultados:

> *As*: "Shaquille O'Neal tem mais de dois metros de altura" – Essa proposição é verdadeira.
>
> *Ad*: "Dustin Huffman tem mais de dois metros de altura" – Essa proposição é falsa.

A lógica dos quantificadores pode ser usada quando um termo predicado ocorre em uma proposição não singular. Por exemplo, as proposições que começam com "Tudo é...", "Algo é..." ou "Nada é..." são formas *genéricas* de proposições. O processo de transformar funções proposicionais em proposições é denominado **quantificação**. Usaremos o **quantificador universal (*x*)** para afirmar que o termo predicado que vem a seguir é *verdadeiro para todos os elementos*. Portanto, *(x)Bx* é lido como "Dado *qualquer x*, *B* é verdadeiro". Por exemplo, se fizermos *B* significar "*bom*", então *(x)Bx* será lido como "Para todo indivíduo *(x)*, tal indivíduo é bom *(B)*". Usaremos o **quantificador existencial ∃*x*** para afirmar que o termo predicado que vem a seguir tem no mínimo uma instância de substituição verdadeira. Portanto, *(∃x) Bx* é lido como "Existe um *x* tal que *B* é verda-

* N. de T.: Jogador americano de basquetebol.

Constante individual: Na lógica dos predicados, é um símbolo (designado por qualquer letra minúscula de *a* até *w*) usado na notação lógica para designar um indivíduo.

Variável individual: Na lógica dos predicados, é um símbolo usado na notação lógica que funciona como indicador do local onde uma constante individual deve ser colocada (são usadas as letras minúsculas *x*, *y* e *z*).

Função proposicional: As funções proposicionais não são nem verdadeiras nem falsas, mas podem ter instâncias de substituição verdadeiras e falsas.

Instância de substituição: Quando uma função proposicional transforma-se em uma proposição, que é ou verdadeira ou falsa.

Quantificação: O processo de converter funções proposicionais em proposições.

Quantificador universal: Um símbolo da lógica dos quantificadores (*x* ou *y*), que é colocado à frente de uma função proposicional, tornando possível afirmar que o predicado que vem a seguir é verdadeiro para todos os elementos.

Quantificador existencial: Na lógica dos quantificadores, o símbolo ∃ é usado para afirmar que qualquer função proposicional, que vem imediatamente após o símbolo, tem alguma instância de substituição verdadeira.

Quantificação universal: Quando uma função proposicional será verdadeira, se e somente se todas as possíveis instâncias de substituição forem verdadeiras.

Quantificação existencial: Quando uma função proposicional será verdadeira, se e somente se ela tiver, no mínimo, uma possível instância de substituição verdadeira.

Instanciação: Na lógica dos quantificadores, a substituição de uma variável individual por uma constante individual.

Generalização: Na lógica dos quantificadores, o processo pelo qual uma proposição é criada a partir de uma função proposicional usando um quantificador universal ou existencial.

deiro para ele". Por exemplo, se fizermos *B* significar "bom", então $(\exists x)\ Bx$ será lido como "Existe no mínimo um indivíduo *(x)* que é bom *(B)*".

A **quantificação universal** de uma função proposicional será verdadeira se e somente se todas as instâncias de substituição possíveis forem verdadeiras. Por exemplo, se fizermos *B* significar "bom", então $(x)Bx$ será verdadeira somente se toda instância de substituição possível for verdadeira ou, em outras palavras, somente se tudo for bom. Por outro lado, a **quantificação existencial** de uma função proposicional será verdadeira se e somente se ela tiver, no mínimo, uma instância de substituição verdadeira. Por exemplo, se fizermos *B* significar "bom", então $(\exists x)\ Bx$ será verdadeira se no mínimo um indivíduo for bom. Dados esses requisitos, proposições podem ser derivadas das funções proposicionais de dois modos: (1) por **instanciação**, a substituição de uma variável individual por uma constante individual, e (2) por **generalização**, usando um quantificador universal ou existencial.

Nem todas as proposições são afirmativas, de modo que, nesses casos, devemos usar o conceito de negação (~) para elaborar as funções proposicionais apropriadas. Por exemplo, a proposição "Nada é bom" pode ser reescrita como "Dado qualquer *x*, ele *não* é bom". Isso é traduzido usando-se o quantificador universal para se obter $(x) \sim Bx$. De modo similar, a proposição "Algumas coisas *não* são boas" é traduzida usando-se o quantificador existencial para se obter $(\exists x) \sim Bx$.

A letra grega *fi* (ϕ) pode ser usada para representar qualquer predicado simples. Dado isso, o que aprendemos poderá ser usado para criar um quadro de oposições dos quantificadores (Figura 7.1).

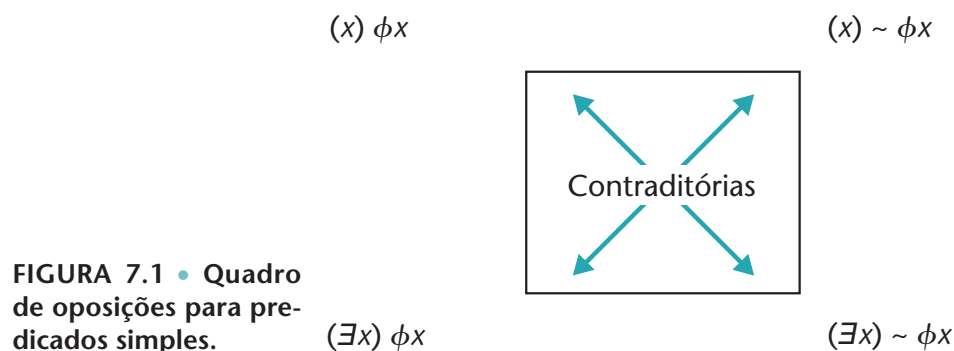



FIGURA 7.1 • Quadro de oposições para predicados simples.

Os dois conjuntos (pares) de contraditórias permitirão que estipulemos quatro relações lógicas importantes entre a quantificação universal e a existencial. Por exemplo, a proposição $(x)\ \phi x$ é logicamente equivalente a $\sim (\exists x) \sim \phi x$ (a negação do seu membro oposto do par). O inverso também é verdadeiro, isto é, $(\exists x)\ \phi x$ é logicamente equivalente a $\sim (x) \sim \phi x$. O outro par de contraditórias pode ser entendido da mesma forma: $(x) \sim \phi x$ é logicamente equivalente a $\sim (\exists x)\ \phi x$, ao passo que $(\exists x) \sim \phi x$ é logicamente equivalente a $\sim (x)\ \phi x$. A Tabela 7.1 resume esses resultados.

Tabela 7.1 Equivalências lógicas de predicados simples

$(x)\ \phi x :: \sim (\exists x) \sim \phi x$
$(x) \sim \phi x :: \sim (\exists x)\ \phi x$
$(\exists x)\ \phi x :: \sim (x) \sim \phi x$
$(\exists x) \sim \phi x :: \sim (x)\ \phi x$

DICA DO PROFESSOR

Você sabe utilizar a notação da lógica quantitiva? Na Dica do professor, você vai aprender sobre a notação da lógica quantitativa e também vai poder conferir exemplos que mostram como utilizá-la. Lembre-se de que o objetivo desse subconjunto da lógica é tratar das preposições que usam os termos: "ninguém", "alguém", "todo mundo". Vale a pena conferir.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

EXERCÍCIOS

1) **Veja as seguintes proposições:**
a) n2>2n ∀n ∈ N
b) n2>2n ∃n ∈ N
c) Dd=1 ∃d

Considere V para as proposições verdadeiras e F para as falsas.

A) V-V-V

B) F-V-F

C) F-F-F

D) V-F-F

E) e) V-V-F

2) **Qual das alternativas é uma possível transcrição simbólica para a situação a seguir?**

João foi à escola ou Maria foi à igreja

A) Ej ∨ Im

B) Ej ∧ Im

C) EjIm

D) EI ∧ jm

E) Não há relação lógica entre os elementos, por isso não é possível representar simbolicamente.

3) Sendo A um predicado com significado de "tem 100 cm", B um predicado com significado de "é azul", p um sujeito "a pessoa" e m um sujeito "um metro". Diga a veracidade das seguintes proposições:

Am v Bp
∃p B
A∀m

A) V-V-V

B) V-F-V

C) F-F-F

D) F-V-F

E) V-V-F

4) Responda se a primeira proposição é verdadeira, se a conclusão é verdadeira e utilize

a condição para responder se a equação é verdadeira.

`∀ (número de casas) ≤ (número de portas), então, com essa proposição, concluímos, com toda certeza, que há mais portas do que casas. Se a conclusão for verdadeira n+n=2n, caso contrário n+n=3n.`

Sendo assim:
2+2=4

A) A proposição é falsa.
A conclusão é falsa.
A equação é falsa.

B) A proposição é falsa.
A conclusão é verdadeira.
A equação é verdadeira.

C) A proposição é verdadeira.
A conclusão é verdadeira.
A equação é verdadeira.

D) A proposição é verdadeira.
A conclusão é falsa.
A equação é falsa.

E) A proposição é verdadeira.
A conclusão é verdadeira.
A equação é falsa.

5) **Diga se as proposições a seguir são verdadeiras.**

`∀ carro, a porta do carro é azul.`

```
∀ carro, este é o exercício 5.
∃ carro, a porta desse carro é azul.
∃ carro, o carro tem mais de 50 m de altura.
```

A) F-V-V-F

B) V-V-V-V

C) F-F-F-F

D) F-F-V-V

E) V-V-F-F

NA PRÁTICA

A lógica dos quantificadores foi um marco no estudo da lógica, pois uniu as proposições verofuncionais e as proposições categóricas. Nesse sentido, houve grandes implicações no estudo da matemática, que obteve maior precisão na sua expressão e novos horizontes. No dia a dia, podemos verificar o uso da lógica quantitativa ao comprar ingressos para um show de rock.

João e Pedro foram os últimos a chegarem para comprar ingressos. No momento, quatro operadores de caixa estavam fazendo o atendimento. Nas filas desses caixas, estavam, naquele momento, 11, 14, 12 e 10 clientes.

Os tempos máximos de atendimento de cada cliente são iguais, respectivamente, a 3, 2, 2,5 e 2,8 minutos.

Considere as filas A, B, C e D.
Os dois amigos João e Pedro estão representados por J e P.
É possível dividir em dois casos:

a) Estão em filas diferentes: Nesse caso, pelo princípio fundamental da contagem, eles possuem 4×3 = 12 modos de ficarem na fila.

b) Estão em uma mesma fila: Nesse caso, podem escolher 4 filas distintas, e depois se colocarem de 2 modos possíveis na fila(J e P, ou P e J).

Temos, então, pelo princípio fundamental da contagem, 4×2 = 8 modos de ficarem na fila. Portanto, há 12 + 8 = 20 maneiras distintas de os dois amigos se posicionarem ao final dessas quatro filas.

SAIBA MAIS

Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do professor:

Livro Matemática Discretas

No capítulo 4 deste livro – Lógica e cálculo proposicional – os autores apresentam, através de definição e exemplos, uma síntese das noções básicas de lógica. Nos itens 4.10 e 4.11 são abordados os quantificadores universal e existencial, incluindo a negação de expressões quantificadas.

Raciocínio lógico - Quantificadores: todo, algum, nenhum - Manter

O vídeo aborda os quantificadores universal e existencial, destacando as expressões em português que representam cada um deles. A seguir apresenta a negação de expressões quantificadas.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Livro Matemática Discretas e suas aplicações

O capítulo 1 deste livro – Os Fundamentos: lógica e demonstrações – apresenta uma síntese das noções básicas de lógica. No item 1.3 é abordada a lógica de predicados e os quantificadores universal e existencial que serão utilizados na simbolização de expressões categóricas.